

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫ

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
Қазақстан Республикасының Ғылым  
Академиясының Алматыдағы  
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық  
университетінің

## N E W S

OF THE ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
al-Farabi Kazakh National University

**SERIES**  
**PHYSICO-MATHEMATICAL**

**4 (338)**

**JULY – AUGUST 2021**

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

---

---

*NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series physico-mathematical journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of chemistry and technologies in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of chemical sciences to our community.*

*Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы «ҚР ҰҒА Хабарлары. Физикалық-математикалық сериясы» ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Химия және технология сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді химиялық ғылымдар бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.*

*НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по химическим наукам для нашего сообщества.*

### **Бас редактор:**

**МҰТАНОВ Ғалымқайыр Мұтанұлы**, техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының м.а. (Алматы, Қазақстан) Н=5

### **Редакция алқасы:**

**ҚАЛИМОЛДАЕВ Мақсат Нұрәділұлы** (бас редактордың орынбасары), физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, ҚР БҒМ ҒК «Ақпараттық және есептеу технологиялары институты» бас директорының кеңесшісі, зертхана меңгерушісі (Алматы, Қазақстан) Н=7

**БАЙГУНЧЕКОВ Жұмаділ Жанабайұлы** (бас редактордың орынбасары), техника ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Кибернетика және ақпараттық технологиялар институты, Сағпаев университетінің Қолданбалы механика және инженерлік графика кафедрасы, (Алматы, Қазақстан) Н=3

**ВОЙЧИК Вальдемар**, техника ғылымдарының докторы (физика), Люблин технологиялық университетінің профессоры (Люблин, Польша) Н=23

**БОШКАЕВ Қуантай Авғазыұлы**, Ph.D. Теориялық және ядролық физика кафедрасының доценті, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н-10

**QUEVEDO Hemando**, профессор, Ядролық ғылымдар институты (Мехико, Мексика) Н=28

**ЖҮСПОВ Марат Абжанұлы**, физика-математика ғылымдарының докторы, теориялық және ядролық физика кафедрасының профессоры, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н=7

**КОВАЛЕВ Александр Михайлович**, физика-математика ғылымдарының докторы, Украина ҰҒА академигі, Қолданбалы математика және механика институты (Донецк, Украина) Н=5

**МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович**, техника ғылымдарының докторы, профессор, Беларусь ҰҒА академигі (Минск, Беларусь) Н=2

**РАМАЗАНОВ Тілекқабыл Сәбитұлы**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің ғылыми-инновациялық қызмет жөніндегі проректоры, (Алматы, Қазақстан) Н=26

**ТАКИБАЕВ Нұрғали Жабағаұлы**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н=5

**ТИГИНЯНУ Ион Михайлович**, физика-математика ғылымдарының докторы, академик, Молдова ғылым Академиясының президенті, Молдова техникалық университеті (Кишинев, Молдова) Н=42

**ХАРИН Станислав Николаевич**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі, Қазақстан-Британ техникалық университеті (Алматы, Қазақстан) Н=10

**ДАВЛЕТОВ Асқар Ербуланович**, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті (Алматы, Қазақстан) Н=12

**КАЛАНДРА Пьетро**, Ph.D (физика), Наноқұрылымды материалдарды зерттеу институтының профессоры (Рим, Италия) Н=26

### **«ҚР ҰҒА Хабарлары.**

**Физика-математикалық сериясы».**

**ISSN 2518-1726 (Online),**

**ISSN 1991-346X (Print)**

Меншіктеуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.). Қазақстан Республикасының Ақпарат және қоғамдық даму министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген **№ 16906-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *математика, информатика, механика, физика, ғарыштық зерттеулер, астрономия, ионосфера.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекен-жайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., тел.: 272-13-19

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2021

Типографияның мекен-жайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Мұратбаев көш., 75.

### Главный редактор:

**МУТАНОВ Галимкаир Мутанович**, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, и.о. генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК (Алматы, Казахстан) Н=5

### Редакционная коллегия:

**КАЛИМОЛДАЕВ Максат Нурадилович**, (заместитель главного редактора), доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, советник генерального директора «Института информационных и вычислительных технологий» КН МОН РК, заведующий лабораторией (Алматы, Казахстан) Н=7

**БАЙГУНЧЕКОВ Жумадил Жанабаевич**, (заместитель главного редактора), доктор технических наук, профессор, академик НАН РК, Институт кибернетики и информационных технологий, кафедра прикладной механики и инженерной графики, университет Сатпаева (Алматы, Казахстан) Н=3

**ВОЙЧИК Вальдемар**, доктор технических наук (физ.-мат.), профессор Люблинского технологического университета (Люблин, Польша) Н=23

**БОШКАЕВ Куантай Авгазыевич**, доктор Ph.D, преподаватель, доцент кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н=10

**QUEVEDO Hemando**, профессор, Национальный автономный университет Мексики (UNAM), Институт ядерных наук (Мехико, Мексика) Н=28

**ЖУСУПОВ Марат Абжанович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и ядерной физики, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н=7

**КОВАЛЕВ Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, академик НАН Украины, Институт прикладной математики и механики (Донецк, Украина) Н=5

**МИХАЛЕВИЧ Александр Александрович**, доктор технических наук, профессор, академик НАН Беларуси (Минск, Беларусь) Н=2

**РАМАЗАНОВ Тлеккабул Сабитович**, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, проректор по научно-инновационной деятельности, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н=26

**ТАКИБАЕВ Нургали Жабагаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н=5

**ТИГИНЯНУ Ион Михайлович**, доктор физико-математических наук, академик, президент Академии наук Молдовы, Технический университет Молдовы (Кишинев, Молдова) Н=42

**ХАРИН Станислав Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, Казахстанско-Британский технический университет (Алматы, Казахстан) Н=10

**ДАВЛЕТОВ Аскар Ербуланович**, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. аль-Фараби (Алматы, Казахстан) Н=12

**КАЛАНДРА Пьетро**, доктор философии (Ph.D, физика), профессор Института по изучению наноструктурированных материалов (Рим, Италия) Н=26

«Известия НАН РК.

Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online),

ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: Республиканское общественное объединение «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и общественного развития Республики Казахстан № 16906-Ж выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *математика, информатика, механика, физика, космические исследования, астрономия, ионосфера.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, оф. 219, тел.: 272-13-19

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2021

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

#### **Editor in chief:**

**MUTANOV Galimkair Mutanovich**, doctor of technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, acting director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK (Almaty, Kazakhstan) H=5

#### **Editorial board:**

**KALIMOLDAYEV Maksat Nuradilovich** (Deputy Editor-in-Chief), doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Advisor to the General Director of the Institute of Information and Computing Technologies of SC MES RK, Head of the Laboratory (Almaty, Kazakhstan) H=7

**BAYGUNCHEKOV Zhumadil Zhanabayevich**, (Deputy Editor-in-Chief), doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS RK, Institute of Cybernetics and Information Technologies, Department of Applied Mechanics and Engineering Graphics, Satbayev University (Almaty, Kazakhstan) H=3

**WOICIK Waldemar**, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor, Lublin University of Technology (Lublin, Poland) H=23

**BOSHKAYEV Kuantai Avgazievich**, PhD, Lecturer, Associate Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H=10

**QUEVEDO Hemando**, Professor, National Autonomous University of Mexico (UNAM), Institute of Nuclear Sciences (Mexico City, Mexico) H=28

**ZHUSSUPOV Marat Abzhanovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theoretical and Nuclear Physics, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H=7

**KOVALEV Alexander Mikhailovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Academician of NAS of Ukraine, Director of the State Institution «Institute of Applied Mathematics and Mechanics» DPR (Donetsk, Ukraine) H=5

**MIKHALEVICH Alexander Alexandrovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of NAS of Belarus (Minsk, Belarus) H=2

**RAMAZANOV Tlekkabul Sabitovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Vice-Rector for Scientific and Innovative Activity, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H=26

**TAKIBAYEV Nurgali Zhabagaevich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H=5

**TIGHINEANU Ion Mikhailovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Academician, Full Member of the Academy of Sciences of Moldova, President of the AS of Moldova, Technical University of Moldova (Chisinau, Moldova) H=42

**KHARIN Stanislav Nikolayevich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, Academician of NAS RK, Kazakh-British Technical University (Almaty, Kazakhstan) H=10

**DAVLETOV Askar Erbulanovich**, Doctor in Physics and Mathematics, Professor, al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan) H=12

**CALANDRA Pietro**, PhD in Physics, Professor at the Institute of Nanostructured Materials (Monterotondo Station Rome, Italy) H=26

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 2518-1726 (Online),**  
**ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA «National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan» (Almaty). The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan No. 16906-Ж, issued 14.02.2018

Thematic scope: *mathematics, computer science, mechanics, physics, space research, astronomy, ionosphere.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, Almaty, 050010, tel. 272-13-19

<http://www.physico-mathematical.kz/index.php/en/>

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 4, Number 338 (2021), 126 – 135

<https://doi.org/10.32014/2021.2518-1726.74>

ISSN 1991-346X

UDC 517.948.34

**Dauylbayev M.K.<sup>1</sup>, Atakhan N.<sup>1\*</sup>, Asset N.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Nazarbayev Intellectual School chemical and biological direction, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: atakhannilupar@gmail.com

### ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTION OF BVP WITH INITIAL JUMPS FOR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

**Abstract:** we consider the undivided boundary value problem for singularly perturbed linear integro-differential equations of  $n$  – th order with integral Fredholm terms, which has the phenomenon  $m_1$  – th order of an initial jump of order at the left end of the segment under consideration. The regular and boundary layer parts of the asymptotic expansion of solutions are determined. The regular terms of the asymptotics are constructed in the form of integral-differential equations, which differ from the usual unperturbed integro-differential equations by the presence of additional terms, called the initial jumps of the integral terms. The magnitudes of these initial jumps are determined. The boundary conditions for the regular terms of the asymptotics also contain additional terms, called the initial jumps of the derivatives of the  $m_1$  – th order. Thus, to determine the regular terms of the asymptotics, we obtain the boundary conditions for linear integro-differential equations with an additional parameter. To determine the boundary layer terms of the asymptotic expansion of solutions, initial problems are obtained for homogeneous and inhomogeneous ordinary differential equations with constant coefficients. Exponential estimates are obtained for the boundary layer terms of the asymptotics. The theorem of existence, uniqueness and both of the symmetric representation of solutions with an estimate of the remainder of the asymptotics is formulated. It is established that the constructed asymptotic approximation to the solution of the original singularly perturbed integro-differential boundary value problem is uniform on the entire considered interval.

**Key words:** singular perturbation, small parameter, asymptotic expansion, the initial jump, the boundary layer.

**Introduction.** Mathematics studies natural processes using mathematical models for them. Any mathematical model is somewhat approximate. When constructing the mathematical models, one tries to capture all essential, dominant feature of the process. On the other hand, the model should be “simple” enough to allow the analytical and numerical treatment leading to the information one wants to obtain about the process. A variety of models in physics, chemical kinetics, mathematical biology, and many other fields are quite naturally formulated in terms of differential equations. During the derivation of the model equations, some terms whose influence on the process is supposed to be negligible are often not taken into account. As a result, the model might be simplified considerably. Such simplifications often rely on physical intuition. Note that other mathematical school of singularly perturbed equations in Kazakhstan and abroad investigate only boundary value problems, which do not have an initial jump. We say a function  $y(x, \varepsilon)$  is a singular perturbation of  $y(x, 0)$  if  $y(x, 0)$  fails to approximate  $y(x, \varepsilon)$  for all  $x$  of interest when  $\varepsilon$  is small. Uniformly valid approximations for such functions can often be found by the modified boundary function method. In our previous works in [1-13] we considered the initial and boundary value problems with the initial jump for differential and integro-differential equations in the stable case. In the article [14] the constructive formula for solutions of boundary value problems for singularly perturbed higher order linear integro-differential equations has been obtained. The asymptotic properties of solutions which are similar to the properties of solutions of differential equations are shown. The difference was that the equations for the coefficients of the asymptotic expansion in the case of integro – differential equations are some what more

complicated than in the case of differential equations. Thus, we can say that the addition of integral terms to the equation leads to some complication of the algorithm for constructing the asymptotic expansion of the solution and the qualitative behavior of the solution will not change. Therefore the problem arises in identifying such asymptotic properties of solutions of integro-differential equations that are not characteristic of differential equations, investigating the problems of this type when the present integral terms will lead to a qualitative change in the asymptotic behavior of solutions of differential equations.

**Scientific novelty.** It is shown that solutions of singularly perturbed general boundary value problems tend to solutions of the corresponding modified degenerate problems. The modified degenerate problems have been constructed. The values of the initial jumps of the solutions and of the integral terms have been found. Asymptotic expansions of solutions of BVP with ordered boundary conditions and general boundary value problems with any degree of accuracy with respect to a small parameter have been constructed.

**Theoretical and practical significance of the research.** The results obtained an important contribution to the development of the theory of singularly perturbed integro-differential equations. Taking into account that the equation is one of the most important classes of singularly perturbed equations, they are mathematical models that study a wide variety of processes in physics, chemistry, biology, engineering, and others.

**Materials and methods.**

Consider the following singularly perturbed integro-differential equation

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_i+1} H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \quad (1)$$

with nonlocal boundary condition

$$h_i y(t, \varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{ij} y^{(j)}(0, \varepsilon) + \sum_{j=0}^{l_i} \beta_{ij} y^{(j)}(1, \varepsilon) = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

where  $\varepsilon > 0$  is small parameter,  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, a_i \in R$  are known constants independent of  $\varepsilon$  and  $\alpha_{1,m_1} \neq 0, n-1 > m_1 > m_2 \geq \dots \geq m_n, n-1 > l_i, i = \overline{1, n}$ .

Assume that the following conditions hold:

(C1)  $A_i(t), F(t), i = \overline{1, n}$  are sufficiently smooth functions on the interval  $[0, 1]$ ;

(C2)  $A_1(t) \geq \gamma = const > 0, 0 \leq t \leq 1$ ;

(C3) Functions  $H_i(t,x), i = 0, \dots, m_i + 1$  are defined and sufficiently smooth in the domain  $D = (0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1)$ ;

(C4)  $\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} h_2 y_{10}(t) & \dots & h_2 y_{n-1,0}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_n y_{10}(t) & \dots & h_n y_{n-1,0}(t) \end{vmatrix} \neq 0$ , where  $y_{i0}(t), i = 1, \dots, n-1$  is the fundamental set of

solutions of the following homogeneous differential equation

$$L_0 y(t) \equiv A_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + A_n(t)y(t) = 0.$$

(C5)  $\lambda = 1$  is not an eigenvalue of the kernel  $H(t,s,\varepsilon)$ .

$$(C6) \bar{\omega} = \begin{vmatrix} 1 + \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} & \dots & \bar{d}_{1n} \\ \bar{d}_{21} & 1 + \bar{d}_{22} & \dots & \bar{d}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{d}_{n1} & \bar{d}_{n2} & \dots & 1 + \bar{d}_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(C7) Number 1 is not an eigenvalue of the kernel  $\bar{H}(t, s)$ .

For the solution of the problem (1),(2) are valid the following limiting equalities [5]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(j)}(t, \varepsilon) = \bar{y}^{(j)}(t), \quad j = \overline{0, m_1 - 1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

(3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(m_1+j)}(t, \varepsilon) = \bar{y}^{(m_1+j)}(t), \quad j = \overline{0, n-1-m_1}, \quad 0 < t \leq 1,$$

where  $\bar{y}(t)$  is the solution of the degenerate problem,  $\Delta_0$  is the initial jump of the solution,

$$L_0 \bar{y} \equiv A_1(t) \bar{y}^{(n-1)}(t) + \sum_{i=2}^n A_i(t) \bar{y}^{(n-i)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} H_i(t, x) \bar{y}^{(i)}(x) dx + \Delta(t) \quad (4)$$

$$h_1 \bar{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{m_1} \alpha_{1j} \bar{y}^{-(j)}(0) + \sum_{j=0}^{l_1} \beta_{1j} \bar{y}^{-(j)}(1) = a_1 - \alpha_{1, m_1} \Delta_0,$$

$$h_i \bar{y}(t) \equiv \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{ij} \bar{y}^{-(j)}(0) + \sum_{j=0}^{l_i} \beta_{ij} \bar{y}^{-(j)}(1) = a_i, \quad i = \overline{2, n}$$

From (3) it follows that the solution  $y(t, \varepsilon)$  of the general boundary value problem (1) and (2) converges to the solution  $\bar{y}(t)$  of the modified degenerate problem (4) as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We note that the limits for  $y^{(m_1+j)}(t, \varepsilon), j = \overline{0, n-1-m_1}$  are not uniform on the interval  $0 \leq t \leq 1$ . They are uniform on the interval  $0 < t_0 \leq t \leq 1$ , where  $t_0$  is sufficiently small but fixed number as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . In the work will be constructed uniformly asymptotic expansion of the solution of the problem (1), (2) on the interval  $0 \leq t \leq 1$ . Therefore near  $t = 0$  the zone appears in which no matter how small  $\varepsilon$  it is, the solution of the original perturbed equation is strongly different from the solution of the degenerate one. This zone is called the boundary layer zone.

Since the solution of the problem (1) and (2) has the  $m_1$ -th order initial jump at the point  $t = 0$ , we seek the asymptotic expansion of the solution of the problem (1), (2) in the next form:

$$y(t, \varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon^{m_1} w_\varepsilon(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (5)$$

where  $y_\varepsilon(t)$  is a regular part of the asymptotic and  $w_\varepsilon(\tau)$  is a boundary layer part, those can be represented in the form:

$$y_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots \quad (6)$$

$$w_\varepsilon(\tau) = w_0(\tau) + \varepsilon w_1(\tau) + \varepsilon^2 w_2(\tau) + \dots$$

Substituting the series (5) into (1), we obtain the following equalities:

$$\varepsilon \left[ y_\varepsilon^{(n)}(t) + \frac{\varepsilon^{m_1}}{\varepsilon^n} w_\varepsilon^{(n)}(\tau) \right] + A_1(t) \left[ y_\varepsilon^{(n-1)}(t) + \frac{\varepsilon^{m_1}}{\varepsilon^{n-1}} w_\varepsilon^{(n-1)}(\tau) \right] + \dots +$$



$$\begin{aligned}
& + A_n(t) \left[ y_\varepsilon(t) + \varepsilon^{m_1} w_\varepsilon(\tau) \right] = F(t) + \int_0^1 \left\{ H_0(t, x) \left[ y_\varepsilon(x) + \varepsilon^{m_1} w_\varepsilon \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] + \dots + \right. \\
& \left. + H_{m_1}(t, x) \left[ y_\varepsilon^{(m_1)}(x) + w_\varepsilon \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] + H_{m_1+1}(t, x) \left[ y_\varepsilon^{(m_1+1)}(x) + \frac{1}{\varepsilon} w_\varepsilon \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \right\} dx
\end{aligned} \tag{7}$$

By replacing the integral expression  $s = \frac{x}{\varepsilon}$  on the right-hand side of the equation (7), we get the improper integral

$$\begin{aligned}
J(t, \varepsilon) = & \int_0^\infty \left[ \varepsilon^{m_1+1} H_0(t, \varepsilon s) w_\varepsilon(s) + \varepsilon^{m_1} H_1(t, \varepsilon s)(s) \dot{w}(s) + \dots + \varepsilon H_{m_1}(t, \varepsilon s) w_\varepsilon^{(m_1)}(s) + \right. \\
& \left. + H_{m_1+1}(t, \varepsilon s)(s) w_\varepsilon^{(m_1+1)}(s) \right] ds
\end{aligned} \tag{8}$$

The improper integral in (8) converges and the second sum in (8) is vanished, because  $O\left(\exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right)\right)$  is less than any power of  $\varepsilon$ , as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We write separately the coefficients depending on  $t$  and on  $\tau$  we obtain the following equalities for  $y_\varepsilon(t)$  and  $w_\varepsilon(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
\varepsilon y_\varepsilon^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n A_i(t) y_\varepsilon^{(n-i)}(t) = & F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} H_i(t, x) y_\varepsilon^{(i)}(x) dx + \\
& + \int_0^\infty \sum_{i=0}^{m_1+1} \varepsilon^{m_1+1-i} H_i(t, \varepsilon s) w_\varepsilon^{(i)}(s) ds,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$w_\varepsilon^{(n)}(\tau) + A_1(\varepsilon \tau) w_\varepsilon^{(n-1)}(\tau) + \varepsilon A_2(\varepsilon \tau) w_\varepsilon^{(n-2)}(\tau) + \dots + \varepsilon^{n-1} A_n(\varepsilon \tau) w_\varepsilon(\tau) = 0 \tag{10}$$

By the degree of  $\varepsilon$  formally expanding  $H_i(t, \varepsilon s), i = \overline{0, m_1+1}$  into a Taylor series at the point  $(t, 0)$ :

$$H_i(t, \varepsilon s) = H_i(t, 0) + \varepsilon s H_i'(t, 0) + \frac{(\varepsilon s)^2}{2!} H_i''(t, 0) + \dots + \frac{(\varepsilon s)^k}{k!} H_i^{(k)}(t, 0) + \dots \quad i = \overline{0, m_1+1} \tag{11}$$

Use (11) in (9), equating coefficients of like powers of  $\varepsilon$ , for the regular part  $y_k(t), k = 0, 1, 2, \dots$  we arrive the following equalities:

$$A_1 y_0^{(n-1)}(t) + \sum_{k=2}^n A_k(t) y_0^{(n-k)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} H_i(t, x) y_0^{(i)}(x) dx + \int_0^\infty H_{m_1+1}(t, 0) w_0^{(m_1+1)}(s) ds$$

$$\text{where } \int_0^\infty H_{m_1+1}(t, 0) w_0^{(m_1+1)}(s) ds = -H_{m_1+1}(t, 0) w_0^{(m_1)}(0)$$

denote by

$$\Delta_0(t) = H_{m_1+1}(t, 0) \Delta_0, \quad \Delta_0 = -w_0^{(m_1)}(0). \tag{12}$$

for determining the coefficient  $y_0(t)$ , we obtain the integro-differential equation

$$A_1 y_0^{(n-1)}(t) + \sum_{k=2}^n A_k(t) y_0^{(n-k)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} H_i(t, x) y_0^{(i)}(x) dx + \Delta_0(t), \quad (13_0)$$

where  $\Delta_0(t)$  is defined by formula (12<sub>0</sub>).

For determining the coefficients  $y_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  we obtain the integro-differential equation

$$A_1(t) y_k^{(n-1)}(t) + \sum_{i=2}^n A_i(t) y_k^{(n-i)}(t) = F_k(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} H_i(t, x) y_k^{(i)}(x) dx + \Delta_k(t), \quad (13_k)$$

where

$$\Delta_k(t) = H_{m_1+1}^{(m_1)}(t, 0) \Delta_k, \quad \Delta_k = -w_k(0) \quad (12_k)$$

and  $F_k(t)$  is known function, can be written as

$$F_k(t) = \int_0^1 \sum_{j=1}^k \frac{s^j}{j!} H_{m_1+1}^{(j)}(t, 0) w_{k-j}^{(m_1+1)}(s) ds + \int_0^1 \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{k-i} \frac{s^j}{j!} H_{m_1+1-i}^{(j)}(t, 0) w_{k-i-j}^{(m_1+1-i)}(s) ds - y_{k-1}^{(n)}(t), \quad (14)$$

$$k = \overline{1, m_1 + 1}$$

$$F_k(t) = \int_0^1 \sum_{j=1}^k \frac{s^j}{j!} H_{m_1+1}^{(j)}(t, 0) w_{k-j}^{(m_1+1)}(s) ds + \int_0^1 \sum_{i=1}^{m_1+1} \sum_{j=0}^{k-i} \frac{s^j}{j!} H_{m_1+1-i}^{(j)}(t, 0) w_{k-i-j}^{(m_1+1-i)}(s) ds - y_{k-1}^{(n)}(t),$$

$$k \geq m_1 + 2.$$

The values  $\Delta_k(t), \Delta_k, k \geq 0$  are called respectively *the initial jumps of the integral terms and solutions*.

By the degree of  $\varepsilon$  formally expanding  $A_i(\varepsilon\tau)$ ,  $i = \overline{1, n}$  into a Taylor series at the point 0:

$$A_i(\varepsilon\tau) = A_i(0) + \varepsilon \tau A_i'(0) + \frac{(\varepsilon\tau)^2}{2!} A_i''(0) + \dots + \frac{(\varepsilon\tau)^k}{k!} A_i^{(k)}(0) + \dots \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Use (15) in (10), equating coefficients of like power of  $\varepsilon$  on both sides (10), we get the equations for the boundary layer functions  $w_k(\tau)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$w_0^{(n)}(\tau) + A_1(0) w_0^{(n-1)}(\tau) = 0, \quad (16_0)$$

$$w_k^{(n)}(\tau) + A_1(0) w_k^{(n-1)}(\tau) = \Phi_k(\tau), \quad (16_k)$$

where  $\Phi_k(\tau)$  is known function, can be written as

$$\Phi_k(\tau) = \begin{cases} - \sum_{j=1}^k \frac{\tau^j}{j!} A_1^{(j)}(0) w_{k-j}^{(n-1)}(\tau) - \sum_{m_1=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{m_1} \frac{\tau^j}{j!} A_{k+1-m_1}^{(j)}(0) w_{m_1-j}^{(n-1+m_1-k)}(\tau), & k = \overline{1, n-1}, \\ - \sum_{j=1}^k \frac{\tau^j}{j!} A_1^{(j)}(0) w_{k-j}^{(n-1)}(\tau) - \sum_{m_1=k+1-n}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_1} \frac{\tau^j}{j!} A_{k+1-m_1}^{(j)}(0) w_{m_1-j}^{(n-1+m_1-k)}(\tau), & k \geq n \end{cases} \quad (17)$$

To determine uniquely the terms  $y_k(t)$  and  $w_k(\tau)$  of the asymptotic, we use (5) in (6) and taking into account boundary condition (2)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{ij} [y_0^{(j)}(0) + \varepsilon y_1^{(j)}(0) + \dots + \varepsilon^{m_1-j} (w_0^{(j)}(0) + \varepsilon w_1^{(j)}(0) + \dots)] + \\ & + \sum_{j=0}^{l_i} \beta_{ij} \left[ y_0^{(j)}(1) + \varepsilon y_1^{(j)}(1) + \dots + \varepsilon^{m_1-j} \left( w_0^{(j)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon w_1^{(j)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \dots \right) \right] = a_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (18)$$

In (18)  $w_k^{(j)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), k = 0, 1, \dots$  it is not taken into account, it cannot be compared than any degree of  $\varepsilon$ .

Equating the coefficients at zero degrees of  $\varepsilon$  in (18) and in view of (12<sub>0</sub>), we have

$$h_1 y_0(t) = a_1 + \alpha_{1, m_1} \Delta_0, \quad h_i y_0(t) = a_i, \quad i = \overline{2, n} \quad (19_0)$$

Thus, the main coefficient  $y_0(t)$  of the regular part of the asymptotic and the initial jump of the solution  $\Delta_0$  are determined from the problem (13<sub>0</sub>), (19<sub>0</sub>).

For determining the coefficient  $w_0(\tau)$ , we have the initial condition  $\Delta_0 = -w_0^{(m_1)}(0)$  from (13<sub>0</sub>), (19<sub>0</sub>). Finding the missed initial condition for coefficient  $w_0(\tau)$  we reduce the order of the equation (16<sub>0</sub>) by integrating from  $\tau$  to  $\infty$  and by virtue of the conditions  $w_0^{(i)}(\infty) = 0, i = \overline{0, n-1}$ . As a result, after  $n-1-m$ -th step, we obtain equation  $w_0^{(m_1+1)}(0) = -A_1^{(m_1)}(0) w_0^{(m)}(0)$ . From this equation as  $\tau = 0$ , we determine the initial condition  $w_0^{(m+1)}(0) = -A_1^{(m)}(0) w_0^{(m)}(0)$ . Continuing this process lowering the degree of equation (16<sub>0</sub>), we obtain the following initial conditions for  $w_0(\tau)$ :

$$w_0^{(i)}(0) = (-1)^{m_1+1-i} \frac{\Delta_0}{A_1(0)^{m_1-i}}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (20_0)$$

Thus, the main coefficient  $w_0(\tau)$  of the boundary layer part of the asymptotic is determined from the problem (16<sub>0</sub>), (20<sub>0</sub>).

Thus, the zeroth approximation of the asymptotic expansion is completely constructed. In the  $k$ -th approximation, for determining the boundary conditions of the coefficient  $y_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , we compare the coefficients of the same powers of the parameter  $\varepsilon$ . As a result, we obtain the following initial conditions for  $y_k(t)$ :

$$h_1 y_k = \begin{cases} \alpha_{1, m_1} \Delta_k - \sum_{j=1}^k \alpha_{1, m_1-j} w_{k-j}^{(m_1-j)}(0), & k = \overline{1, m_1}, \\ \alpha_{1, m_1} \Delta_k - \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_{1, m_1-j} w_{k-j}^{(m_1-j)}(0), & k \geq m_1 + 1 \end{cases} \quad (19_k)$$

$$h_i y_k = \begin{cases} 0, & k = \overline{1, m_1 - m_i - 1}, \\ - \sum_{j=0}^{k-m_1+m_i} \alpha_{i, m_1-j} w_{k-m_1+m_i-j}^{(m_i-j)}(0), & k = \overline{m_1 - m_i, m_1}, \quad i = \overline{2, n} \\ - \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{i, m_i-j} w_{k-m_1+m_i-j}^{(m_i-j)}(0), & k \geq m_1 + 1 \end{cases}$$

From (13<sub>k</sub>), (19<sub>k</sub>) we determine  $y_k(t), \Delta_k, k \geq 1$ .

Now, we will be determine the initial conditions for the coefficient  $w_k(\tau), k \geq 1$ . In order to find the missing of the equation (16<sub>k</sub>) by virtue of the conditions  $w_k(\infty) = 0, i = \overline{0, n-1}$ . Then, we get the initial conditions for determining  $w_k(\tau), k \geq 1$  :

$$\begin{aligned} w_k^{(i)}(0) &= (-A_1(0))^{i-m_1} w_k^{(m_1)}(0) + \\ &+ (-1)^{n-1-i} \int_0^\infty \sum_{j=n-1-m_1}^{n-2-i} \frac{s^j}{j!} (A_1(0))^{j-(n-1-i)} \Phi_k(s) ds, \quad i = \overline{0, m_1}, \end{aligned} \quad (20_k)$$

$$\begin{aligned} w_k^{(i)}(0) &= (-A_1(0))^{i-m_1} w_k^{(m_1)}(0) + \\ &+ (-1)^{n-i} \int_0^\infty \sum_{j=n-1-i}^{\infty n-2-m_1} \frac{s^j}{j!} (A_1(0))^{j-(n-1-i)} \Phi_k(s) ds, \quad i \geq m_1 + 1 \end{aligned}$$

Thus, the  $k$ -th approximation of the asymptotic is completely constructed.

**Results and discussion.** *Theorem.* Let functions  $A_i(t), F(t) \in C^{N+n-m_1}[a, b], i = \overline{1, n}$  and conditions (C2) - (C7) hold. Then for sufficiently small  $\varepsilon$  the boundary value problem (1) and (2) has an unique solution on the  $0 \leq t \leq 1$  and that is expressed by the formula

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}_N(t, \varepsilon) + R_N(t, \varepsilon), \quad (21)$$

where  $\bar{y}_N(t, \varepsilon)$  is defined by the formula

$$\bar{y}_N(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t) + \varepsilon^{m_1} \sum_{k=0}^{N+n-1-m_1} \varepsilon^k w_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad (22)$$

and for the remainder term the estimates are valid

$$\left| R_N^{(i)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^{N+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (23)$$

where  $C > 0$  is a some constant independent of  $\varepsilon$ .

**Proof.** We construct the  $N$ -th partial sum (22) of the expansion (5),(6). The function  $\bar{y}_N(t, \varepsilon)$  satisfies problem (1), (2) with accuracy of order  $O(\varepsilon^{N+1})$ , i.e.

$$L_\varepsilon \bar{y}_N(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{1m_1+1} H_i(t, x) \bar{y}_N^{(i)}(x, \varepsilon) dx + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (24)$$

$$h_i \bar{y}_N(t, \varepsilon) = a_i + O(\varepsilon^{N+1}), \quad i = 1, n$$

Denote by  $y(t, \varepsilon) = \bar{y}_N(t, \varepsilon) + R_N(t, \varepsilon)$ . Then for the remainder  $R_N(t, \varepsilon)$  we obtain the problem as follows

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\varepsilon} R_N(t, \varepsilon) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{m_1+1} H_i(t, x) R_N^{(i)}(x, \varepsilon) dx + O(\varepsilon^{N+1}), \\ h_i R_N(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}), \quad i = 1, n \end{array} \right. \quad (25)$$

We apply the asymptotic estimation of the solution of the problem (1),(2) to the problem (25). Then we obtain the estimates

$$\left| R_N^{(j)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^{N+1} + C \varepsilon^{N+1+m_1-j} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad j = \overline{0, n-1} \quad 0 < t \leq 1 \quad (26)$$

This means that estimates  $R_N^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^N), \dots, R_N^{(n-1)}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N-n+2+m_1})$  is valid at point  $t=0$ , i.e. The required estimates do not hold. To obtain the necessary estimates, we consider the equalities

$$y^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) = y_N^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) + R_N^{(m_1+1)}(t, \varepsilon), \quad y_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) = y_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) + R_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) \quad (27)$$

Hence, equating the right-hand sides of (27), we get

$$R_N^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) = y_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) - y_N^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) + R_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon), \quad (28)$$

where  $\bar{y}_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) - \bar{y}_N^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{N+1} y_{N+1}^{(m_1+1)}(t) + \varepsilon^{N+n-1-m_1} w_{N+n-m_1}^{(m_1+1)}(\tau)$  and the remainder term  $R_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon)$  in (28) satisfies the estimate  $\left| R_{N+1}^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^{N+2} + C \varepsilon^{N+1} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right)$ . Thus, we obtain the required estimates:  $\left| R_N^{(m_1+1)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^{N+1}$ . Similarly, considering the equalities

$$y^{(n-1)}(t, \varepsilon) = y_N^{(n-1)}(t, \varepsilon) + R_N^{(n-1)}(t, \varepsilon), \quad y_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon) = y_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon) + R_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon) \quad (29)$$

Hence, equating the right-hand sides of (29), we obtain

$$R_N^{(n-1)}(t, \varepsilon) = y_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon) - y_N^{(n-1)}(t, \varepsilon) + R_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon), \quad (30)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{y}_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon) - \bar{y}_N^{(n-1)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon^{N+1} y_{N+1}^{(n-1)}(t) + \dots + \varepsilon^{N+n-1-m_1} y_{N+n-1-m_1}^{(n-1)}(t) + \\ &+ \varepsilon^{N+1} w_{N+n-m_1}^{(n-1)}(\tau) + \dots + \varepsilon^{N+n-1-m_1} w_{N+2(n-1-m_1)}^{(n-1)}(\tau), \end{aligned}$$

The remainder term  $R_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon)$  in (30) satisfies the estimate

$\left| R_{N+1}^{(n-1)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^{N+n-m_1} + C \varepsilon^{N+1} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\varepsilon}\right)$ . Thus, we obtain the required estimates

$\left| R_N^{(n-1)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^{N+1}$ . Theorem is proved.

**Conclusion.** We investigated asymptotic expansion of solution of general boundary value problem with initial jumps for higher-order singularly perturbed integro - differential equation with any degree of accuracy with respect to a small parameter have been constructed.

Дауылбаев М.Қ.<sup>1</sup>, Атахан Н.<sup>1\*</sup>, Асет Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup> Химия-биология бағытындағы Назарбаев Зияткерлік мектебі, Алматы, Қазақстан.

E-mail: atakhannilupar@gmail.com

## СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН БАСТАПҚЫ СЕКІРІСТІ ШЕТТІК ЕСЕБІ ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖІКТЕЛУІ

**Аннотация:** қарастырылып отырған кесіндінің сол жақ шетінде  $m_1$  – ші ретті бастапқы секірісі бар  $n$  – ші ретті сингулярлы ауытқыған Фредгольм сызықты интегралды-дифференциалдық тендеулері үшін бөлінбеген шеттік есеп қарастырылады. Шешімнің асимптотикалық жіктелуінің регулярлы және шекаралық қабатты мүшелері анықталды. Асимптотиканың регулярлы мүшелері әдеттегі ауытқымаған тендеулерден бөлек интегралдық мүшелердің бастапқы секірістері деп аталатын қосымша мүшелері бар интегралды-дифференциалдық тендеулер түрінде құрылды. Осы бастапқы секірістердің шамалары анықталды. Асимптотиканың регулярлы мүшелерінің шеттік шарттарында  $m_1$  – ші ретті туындының бастапқы секірістері деп аталатын қосымша мүшелер болады. Сонымен, асимптотиканың регулярлы мүшелерін анықтау үшін сызықты интегралды-дифференциалдық тендеулерге арналған қосымша параметрлі шеттік есептер алынды. Шешімнің асимптотикасының шекаралық қабатты мүшелерін анықтау үшін тұрақты коэффициентті біртекті және біртекті емес дифференциалдық тендеулерге арналған бастапқы есептер алынды. Асимптотиканың шекаралық қабатты мүшелері үшін экспоненциалды бағалаулар алынды. Шешімнің бар болуы, даралығы және асимптотикалық түрде берілуіне теорема келтірілген. Асимптотиканың қалдық мүшесі бағаланды. Берілген сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық тендеулерге арналған шеттік есеп шешімінен құрылған асимптотикалық жуықтау барлық кесіндіде бірқалыпты сипатта болады.

**Түйін сөздер:** сингулярлы ауытқу, кіші параметр, асимптотикалық жіктелу, бастапқы секіріс, шекаралық қабат.

Дауылбаев М.Қ.<sup>1</sup>, Атахан Н.<sup>1\*</sup>, Асет Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

<sup>2</sup> Назарбаев Интеллектуальная школа химико-биологического направления, Алматы, Казахстан.

E-mail: atakhannilupar@gmail.com

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Аннотация:** рассматривается неразделенная краевая задача для сингулярно возмущенных линейных интегро - дифференциальных уравнений  $n$  – го порядка с интегральными членами Фредгольма, обладающая на левом конце рассматриваемого отрезка явлением начального скачка  $m_1$  – го порядка. Определены регулярные и погран слойные части асимптотического разложения решений. Регулярные члены асимптотики построены в виде интегро – дифференциальных уравнений, отличающихся от обычных не возмущенных интегро-дифференциальных уравнений наличием дополнительных слагаемых, называемых начальными скачками интегральных членов. Определены величины этих начальных скачков. Краевые условия для регулярных членов асимптотики также содержат дополнительные слагаемые, называемые начальными скачками производных  $m_1$  – го порядка. Тем самым, для определения регулярных членов асимптотики получают краевые условия для линейных интегро – дифференциальных уравнений с дополнительным параметром. Для определения погран слойных членов асимптотического разложения решений получены начальные условия для однородных и неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Получены экспоненциальные оценки для погран слойных членов асимптотики. Сформулирована теорема существования, единственности и оба асимптотическом представлении решений с оценкой остаточного члена асимптотики. Установлено, что построенное асимптотическое

приближение к решению исходной сингулярно возмущенной интегро – дифференциальной краевой задачи носитравномерный характер на всем рассматриваемом отрезке.

**Ключевые слова:** сингулярное возмущение, малый параметр, асимптотическое разложение, начальный скачок, погранслои.

#### **Information about authors:**

**Dauylbaev Muratkhan Kudaibergenovich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the department mathematics, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, mdauylbayev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4179-0374>;

**Atakhan Nilupar** – PhD senior-lecture of the department mathematics, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, atakhannilupar@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-8940-1983>;

**Asset Nassikhat** – teacher moderator of the Nazarbayev Intellectual School chemical and biological direction, Almaty, Kazakhstan, aset\_n@hbalm.nis.edu.kz, <https://orcid.org/0000-0002-6354-7404>.

#### **REFERENCES**

[1] Vasil'eva, A.B., Butuzov, V.F., Kalachev, L.V. (1995) The boundary function method for singular perturbation problems. – Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics.

[2] Nurgabyl D.N. (2008) Asimptoticheskoe razlozhenie reshenia kraevoi zadachi s nachalny miskachkom, Vestnik Karagandinskogo gosudarstvennogo universiteta, seria matematika №1, P. 40-47, (in russian).

[3] Nurgabyl D.N. (2008) Asimptoticheskoe razlozhenie reshenia nelineinogo differencialnogouravnenia s malym parametrom pristarshoi proizvodnoi s nerazdelennymi kraevymi usloviami, Izvestia NAN RK, seriamatematicheskaiia, №3, P. 19-25, (in russian).

[4] Nurgabyl D.N. (2014) Asymptotic estimates of the solution of a restoration problem with an initial jump, Journal of Applied Mathematics, №3, P. 19-25, (in russian).

[5] Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E. (2017) Boundary –value problems with initial jumps for singularly perturbed integrodifferential equations // Journal of Mathematical Sciences. Vol. 222. No.3. P. 214-225.

[6] Akhmet M., Dauylbaev M., Mirzakulova A. (2018) A singularly perturbed differential equation with piecewise constant argument of generalized type // Turkish Journal of Mathematics. Vol.42. No.4. P.1680-1685.

[7] Duisebek N. Nurgabyl, Almapys B. Uaissov (2021). Asymptotic behavior of the solution of a singularly perturbed general boundary value problem with boundary jumps // Numerical Methods of Partial Differential Equation Vol.37, Issue3, P.2375-2392.

[8] Dauylbayev M.K., Atakhan N., Mirzakulova A.E. (2018) Asymptotic expansion of solution of general BVP with initial jumps for higher order singularly perturbed integro - differential equation // News of the National Acedemy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Physico - methemathical series. №6(322). - Б.28-36.

## МАЗМҰНЫ

### ФИЗИКА

<b>Бастыкова Н.Х., Коданова С.К.</b> ТЕРМОЯДРОЛЫҚ ҚАБЫРҒАЛЫҚ ПЛАЗМАДА ТОЗАҢДЫ БӨЛШЕКТЕРДІҢ ДИНАМИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫН КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛЬДЕУ.....	6
<b>Байсеитов Қ.М.</b> КВАРК – ГЛЮОНДЫ ПЛАЗМАНЫҢ ДИЭЛЕКТРЛІК ФУНКЦИЯСЫ.....	15
<b>Досымбетова Г.Б., Сванбаев Е.А., Жуман Г.Б., Нұрғалиев М.К., Саймбетов А.К.</b> КОНЦЕНТРАЦИЯЛАУШЫ КРЕМНИЙЛІ КҮН БАТАРЕЯСЫН ЖАСАУ.....	25
<b>Джазаиров-Кахраманов А.В., Имамбеков О., Карипбаева Л.Т., Стеблякова А.А.</b> ${}^8\text{Li}(p,\gamma){}^9\text{Be}$ ҚАРМАУЫ КЕЗІНДЕ СӘЙКЕС ${}^9\text{Be}$ АСТРОФИЗИКАЛЫҚ СИНТЕЗІ ҮШІН РЕАКЦИЯ ЖЫЛДАМДЫҒЫНА РЕЗОНАНСТАРЫНЫҢ МӘНІ.....	31
<b>Исмагамбетова Т.Н., Габдуллин М.Т., Ramazanov T.S.</b> ЖАРТЫЛАЙ АЗҒЫНДАЛҒАН КВАЗИКЛАССИКАЛЫҚ ИОНДАРЫ БАР ТЫҒЫЗ СУТЕГІ ПЛАЗМАСЫНЫҢ ТЕРМОДИНАМИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ.....	41
<b>Ибраев А.Т.</b> ЗАРЯДТАЛҒАН БӨЛШЕКТЕР КӨЗДЕРІНІҢ ҚАСИЕТТЕРІН ЗЕРТТЕУ ТЕОРИЯСЫН ЖЕТІЛДІРУ.....	47
<b>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., В.М. Томозов</b> ЖАРҚ ЕТУІ САЛДАРЫНАН ДАМЫҒАН ҰЗАҚ ГАММА – СӨУЛЕЛЕРІНІҢ ҮДЕМЕЛІ ПРОТОНДАР АҒЫНЫНЫҢ СИПАТТАМАСЫ.....	55
<b>Садыков Т.Х., Аргынова А.Х., Жуков В.В., Новолодская О.А., Пискаль В.В.</b> «АДРОН-55» ТЯНЬ-ШАНЬ ИОНДАУШЫ - НЕЙТРОНДЫ КАЛОРИМЕТРІНІҢ ПЕРИФЕРИЯЛЫҚ ДЕТЕКТОРЛАРЫН ЖАҢҒЫРТУ».....	65
<b>Саяков О., Жао Я., Машекова А.</b> 3D СҮЙЫҚТЫҚ ПЕН ҚҰРЫЛЫМНЫҢ ЕКІ ЖАҚТЫ ӨЗАРА ӘРЕКЕТТЕСУІМЕН ҚАНАТТЫ АЭРОДИНАМИКАЛЫҚ ТАЛДАУ.....	75
<b>Терещенко В.М.</b> СПЕКТРОФОТОМЕТРЛІК СТАНДАРТТАРДЫҢ ЖИНАҚТАЛҒАН КАТАЛОГЫН ҚҰРУДЫҢ ПАЙДАСЫ ТУРАЛЫ.....	82
<b>ИНФОРМАТИКА</b>	
<b>Дайырбаева Э.Н., Ерімбетова А.С., Тойгожинова А.Ж.</b> ӘР ТҮРЛІ МАТРИЦАЛАРДЫ ҚОЛДАНА ОТЫРЫП, СТРИП ӘДІСІНЕ НЕГІЗДЕЛГЕН КЕСКІНДІ ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУ НӘТИЖЕЛЕРІН САЛЫСТЫРМАЛЫ ТАЛДАУ.....	89
<b>Калижанова А., Вуйчик В., Кунельбаев М., Козбакова А., Амиргалиева Ж.</b> МАТЛАВ ОРТАСЫНДА КӨЛБЕУ БРЭГГ ТОРЫ БАР ТАЛШЫҚТЫ -ОПТИКАЛЫҚ СЕНСОРДЫҢ СПЕКТРЛІК СИПАТТАМАЛАРЫН МОДЕЛЬДЕУ.....	96
<b>Жантаев Ж.Ш., Қайранбаева А.Б., Қиялбаева А.К., Нұрпейсова Г.Б., Панюкова Д.В.</b> ЗИЯТКЕРЛІК БОЛЖАУҒА АРНАЛҒАН МАҒЛҰМАТ ЖИНАУ: ӘДІСТЕР МЕН НӘТИЖЕЛЕР.....	108



## МАТЕМАТИКА

<b>Айсағалиев С.А., Севрюгин И.В., Исаева З.Б., Игликова М.Н.</b> ШЕКТЕУЛЕР МЕН СЫЗЫҚТЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ ТИІМДІ БАСҚАРУ.....	118
<b>Дауылбаев М.Қ., Атахан Н., Асет Н.</b> СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУ ҮШІН БАСТАПҚЫ СЕКІРІСТІ ШЕТТІК ЕСЕБІ ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖІКТЕЛУІ.....	126
<b>Есмағамбетов Б.С., Апсеметов А.Т., Балабекова М.О., Каюмов К.Г., Джакибаев А.Ш.</b> КЕЗДЕЙСОҚ ПРОЦЕСТЕРДІҢ ҰҚТИМАЛДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫН ПАРАМЕТРЛІК ЕМЕС БАҒАЛАУ.....	136
<b>Иманбаев Н.С.</b> КВАЗИСИНГУЛЯРЛЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУДІҢ ИНДЕКСІН ЕСЕПТЕУДІҢ ТОПОЛОГИЯЛЫҚ БІР ӘДІСІ ЖАЙЛЫ.....	143
<b>Мырканова А.М., Аканова К.М., Ластовецкий А.Л.</b> ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ ЭКОНОМИКАЛЫҚ КЕҢІСТІГІНІҢ АНИЗОТРОПИЯСЫ.....	151
<b>Омарова Г.Т., Омарова Ж.Т.</b> К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ.....	165

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА

<b>Бастыкова Н.Х., Коданова С.К.</b> КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ В ПРИСТЕНОЧНОЙ ТЕРМОЯДЕРНОЙ ПЛАЗМЕ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	6
<b>Байсеитов К.М.</b> ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ КВАРК-ГЛЮОННОЙ ПЛАЗМЫ.....	15
<b>Досымбетова Г.Б., Сванбаев Е.А., Жуман Г.Б., Нұрғалиев М.К., Саймбетов А.К.</b> РАЗРАБОТКА КОНЦЕНТРИРУЮЩИХ КРЕМНИЕВЫХ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ.....	25
<b>Джазаиров-Кахраманов А.В., Имамбеков О., Карипбаева Л.Т., Стеблякова А.А.</b> ЗНАЧЕНИЕ РЕЗОНАНСОВ НА СКОРОСТЬ РЕАКЦИИ ПРИ ${}^8\text{Li}(p,\gamma){}^9\text{Be}$ ЗАХВАТЕ ДЛЯ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО АСТРОФИЗИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ${}^9\text{Be}$ .....	31
<b>Исмагамбетова Т.Н., Габдуллин М.Т., Ramazanov T.S.</b> ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛОТНОЙ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ С ЧАСТИЧНО ВЫРОЖДЕННЫМИ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИМИ ИОНАМИ.....	41
<b>Ибраев А.Т.</b> КОРРЕКТИРОВКА ТЕОРИИ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ИСТОЧНИКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.....	47
<b>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</b> ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКОВ УСКОРЕННЫХ ПРОТОНОВ ПРИ РАЗВИТИИ ВСПЫШЕК С ПРОДОЛЖИТЕЛЬНЫМ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕМ.....	55
<b>Садыков Т.Х., Аргынова А.Х., Жуков В.В., Новолодская О.А., Пискаль В.В.</b> МОДЕРНИЗАЦИЯ ПЕРИФЕРИЙНЫХ ДЕТЕКТОРОВ ТЯНЬ-ШАНСКОГО ИОНИЗАЦИОННО-НЕЙТРОННОГО КАЛОРИМЕТРА «АДРОН-55».....	65
<b>Саяков О., Жао Я., Машекова А.</b> 3D АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРЫЛА С ДВУСТОРОННИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЖИДКОСТИ И КОНСТРУКЦИИ.....	75
<b>Терещенко В.М.</b> О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ СОЗДАНИЯ СВОДНОГО КАТАЛОГА СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ.....	82

### ИНФОРМАТИКА

<b>Дайырбаева Э.Н., Еримбетова А.С., Тойгожинова А.Ж.</b> СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ СТРИП-МЕТОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ МАТРИЦ.....	89
<b>Калижанова А., Вуйчик В., Кунельбаев М., Козбакова А., Амиргалиева Ж.</b> МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКОГО ДАТЧИКА С НАКЛОННОЙ РЕШЕТКОЙ БРЭГГА В СРЕДЕ MATLAB.....	96
<b>Жантаев Ж.Ш., Кайранбаева А.Б., Киялбаев А.К., Нурпеисова Г.Б., Панюкова Д.В.</b> СБОР ДАННЫХ ДЛЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ: МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ.....	108

## МАТЕМАТИКА

<b>Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В., Исаева З.Б., Игликова М.Н.</b> ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ.....	118
<b>Дауылбаев М.Қ., Атахан Н., Асет Н.</b> АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ СКАЧКАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.....	126
<b>Есмагамбетов Б.С., Апсеметов А.Т., Балабекова М.О., Каюмов К.Г., Джакибаев А.Ш.</b> НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	136
<b>Иманбаев Н.С.</b> ОБ ОДНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНДЕКСА КВАЗИСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.....	143
<b>Мырканова А.М., Аканова К.М., Ластовецкий А.Л.</b> АНИЗОТРОПИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН....	151
<b>Омарова Г.Т., Омарова Ж.Т.</b> К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ.....	159

## CONTENTS

### PHYSICS

<b>Bastykova N.Kh., Kodanova S.K.</b> COMPUTER SIMULATION OF THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF DUST PARTICLES IN THE EDGE FUSION PLASMA.....	6
<b>Baiseitov K.M.</b> DIELECTRIC FUNCTION OF QUARK-GLUON PLASMA.....	15
<b>Dosymbetova G.B., Svanbayev Ye.A., Zhuman G.B., Nurgaliyev M.K., Saymbetov A.K.</b> DEVELOPMENT OF CONCENTRATING SILICON SOLAR CELLS.....	25
<b>Dzhazairov-Kakhramanov A.V., Imambekov O., Karipbayeva L.T., Steblyakova A.A.</b> THE ROLE OF RESONANCES IN THE CAPTURE OF ${}^8\text{Li}(p,\gamma){}^9\text{Be}$ ON THE REACTION RATE OF THE RELEVANT ASTROPHYSICAL SYNTHESIS OF ${}^9\text{Be}$ .....	31
<b>Ismagambetova T.N., Gabdullin M.T., Ramazanov T.S.</b> THERMODYNAMIC PROPERTIES OF DENSE HYDROGEN PLASMAS WITH PARTIALLY DEGENERATE SEMICLASSICAL IONS.....	41
<b>Ibrayev A.T.</b> CORRECTION OF THE THEORY OF RESEARCHING THE PROPERTIES OF CHARGED PARTICLES SOURCES.....	47
<b>Minasyants G.S., Minasyants T.M., Tomozov V.M.</b> CHARACTERISTICS OF ACCELERATED PROTONS FLUXES DURING THE DEVELOPMENT OF FLARES WITH PROLONGED GAMMA RADIATION.....	55
<b>Sadykov T.Kh., Argynova A.Kh., Jukov V.V., Novolodskaya O.A., Piskal' V.V.</b> MODERNIZATION OF THE PERIPHERAL DETECTORS OF TIEN-SHAN IONIZATION- NEUTRON CALORIMETER DETECTORS "HADRON-55".....	65
<b>Sayakov O., Zhao Y., Mashekova A.</b> 3D AERODYNAMIC ANALYSIS OF AWING WITH 2-WAY FLUID-STRUCTURE INTERACTION.....	75
<b>Tereshchenko V.M.</b> ABOUT EXPEDIENCY OF CREATION COMPILE CATALOGUE OF SPECTROPHOTOMETRIC STANDARDS.....	82

### COMPUTER SCIENCE

<b>Daiyrbayeva E., Yerimbetova A., Toigozhinova A.</b> COMPARATIVE ANALYSIS OF THE RESULTS OF IMAGE RECOVERY BASED ON THE STRIP METHOD USING VARIOUS MATRICES.....	89
<b>Kalizhanova A., Wojcik W., Kunelbayev M., Kozbakova A., Amirgaliyeva Zh.</b> MODELING SPECTRAL CHARACTERISTICS OF FIBER-OPTIC SENSOR WITH TILTED BRAGG GRATING IN MATLAB MEDIUM.....	96
<b>Zhantayev Zh., Kairanbayeva A., Kiyalbayev A., Nurpeissova G., Panyukova D.</b> DATA COLLECTION FOR INTELLECTUAL FORECASTING: METHODS AND RESULTS.....	108

## MATHEMATICS

<b>Aisagaliev S.A., Sevryugin I.V., Issyaeva Z.B., Iglukova M.N.</b> OPTIMAL CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH CONDITIONS.....	118
<b>Dauylbayev M.K., Atakhan N., Asset N.</b> ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTION OF BVP WITH INITIAL JUMPS FOR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION.....	126
<b>Yesmagambetov B.B., Apsemetov A., Balabekova M.O., Kayumov K.G., Jakibayev A.</b> NON-PARAMETRIC ESTIMATION OF PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF RANDOM PROCESSES.....	136
<b>Imanbaev N.S.</b> ON A TOPOLOGICAL METHOD FOR CALCULATING THE INDEX OF QUASI-SINGULAR INTEGRAL EQUATION.....	143
<b>Myrkanova A.M., Akanova K.M., Lastovetsky A.L.</b> ANISOTROPY OF ECONOMIC SPACE OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN.....	151
<b>Omarova G.T., Omarova Zh.T.</b> TO THE INVERSE PROBLEM OF CELESTIAL MECHANICS.....	159

## **Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

**[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)**

**<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>**

**ISSN2518-1726 (Online),**

**ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы: *М.С. Ахметова, А. Ботанқызы, Д.С. Аленов, Р.Ж. Мрзабаева*  
Верстка на компьютере *Г.Д.Жадыранова*

Подписано в печать 15.08.2021.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать –ризограф.

4,6 п.л. Тираж 300. Заказ 4.